

Конференции «Подготовка профессиональных кадров в магистратуре  
в эпоху цифровой трансформации» 5 лет

УДК 621.396.99

## Использование фильтра Калмана с ограничениями в целях уменьшения чувствительности приемной адаптивной фазированной антенной решетки к углу прихода

Щедрин А. А.✉, Бойко И. А.

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича,  
Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

**Постановка проблемы.** При разработке приемных адаптивных фазированных антенных решеток использование пространственной избирательности, т. е. априорных данных о пространственных координатах источника сигнала в алгоритме адаптации является более выигрышным по сравнению с использованием информации о форме сигнала в условиях нестатичного канала связи. Одной из главных проблем, влияющих на надежный прием сигнала, является несоответствие предполагаемого угла прихода сигнала реальному. Данная проблема становится еще более острой в условиях, когда направление прихода полезного сигнала меняется во времени. В данной статье рассмотрен метод уменьшения чувствительности приемной адаптивной фазированной антенной решетки к рассогласованию предполагаемого и реального направления источника сигнала. **Результаты:** рассмотрена модификация пространственно-избирательного алгоритма MVDR (аббр. от англ. Minimum Variance Distortionless Response – минимальная дисперсия без искажений), обеспечивающего адаптацию диаграммы направленности приемной адаптивной фазированной антенной решетки с целью повышения отношения сигнал / шум. Использование расширенного фильтра Калмана для поиска оптимальной оценки вектора весовых коэффициентов, являющейся компромиссным вариантом между векторами весовых коэффициентов, образующими главный лепесток диаграммы направленности в предполагаемом и реальном направлениях источника сигнала, позволило повысить отношение сигнал / шум на выходе малоэлементной антенной решетки не менее чем на 20 дБ по сравнению с входным сигналом в условиях отклонения предполагаемого угла прихода от реального в диапазоне  $\pm 10^\circ$  в азимутальной плоскости и при уровне шума 10 дБ по сравнению с сигналом. **Практическая значимость:** использование данной модификации алгоритма MVDR целесообразно при разработке пространственно-избирательных малоэлементных приемных антенных решеток при условии высокой погрешности определения угла прихода полезного сигнала и наличия большой вычислительной мощности адаптивного устройства.

**Ключевые слова:** фильтр Калмана с ограничениями, адаптивная антенная решетка, уменьшение чувствительности к углу прихода, диаграммообразование с целью уменьшения помех, адаптивная фазированная антенная решетка с пространственной избирательностью

### Библиографическая ссылка на статью:

Щедрин А. А., Бойко И. А. Использование фильтра Калмана с ограничениями в целях уменьшения чувствительности приемной адаптивной фазированной антенной решетки к углу прихода // Вестник СПбГУТ. 2024. Т. 2. № 4. С. 4. EDN: ENPYXH

### Reference for citation:

Schedrin A., Boyko I. Using a Kalman Filter with Constraints to Reduce the Sensitivity of the Receiving Active Phased Array Antenna to the Angle // Herald of SPbSUT. 2024. Vol. 2. Iss. 4. P. 4. EDN: ENPYXH

## Введение

Одной из главных проблем приемных адаптивных фазированных антенных решеток (АФАР) с пространственной избирательностью, влияющих на надежный прием сигнала при условии подавления помех, является несоответствие предполагаемого угла прихода сигнала реальному [1, 2]. Данное отклонение может быть вызвано различными причинами, такими как погрешность локационного оборудования, высокая скорость изменения направления прихода сигнала и т. п. Даже небольшое несоответствие реального направления прихода сигнала предполагаемому приводит к расположению главного лепестка диаграммы направленности (ДН) в нежелательном направлении, что, в свою очередь, приводит либо к полному подавлению сигнала, либо к серьезному уменьшению отношения сигнал / шум (ОСШ) [3].

В данной статье рассмотрен метод понижения чувствительности АФАР к углу прихода сигнала на основе расширенного фильтра Калмана с ограничениями, включенными в уравнение измерения.

## Описание метода

Рассмотрим линейную  $M$ -элементную антенную решетку, выходной сигнал которой на итерации  $k$  можно представить как:

$$y_k = \mathbf{x}_k^H \mathbf{w}_k,$$

где  $\mathbf{x}_k$  – вектор  $M \times 1$  наблюдений АФАР, представляющий собой полное возбуждение, пришедшее на элементы  $1 \dots M$  решетки;  $\mathbf{w}_k$  – вектор  $M \times 1$  весовых коэффициентов АФАР.

Вектор наблюдения  $\mathbf{x}_k$  можно записать в виде:

$$\mathbf{x}_k = s_k \cdot \mathbf{l} + \mathbf{u}_k + \mathbf{n}_k,$$

где  $s_k$  – полезный сигнал;  $\mathbf{l}$  – вектор  $M \times 1$  направления прихода полезного сигнала;  $\mathbf{u}_k$  и  $\mathbf{n}_k$  – векторы  $M \times 1$  помех и шума, соответственно.

Предполагается, что полезный сигнал и помехи не коррелированы и стационарны. Минимизация мощности помех и шума при сохранении приема полезного сигнала без искажений реализована в алгоритме MVDR [3]. Задача диаграммообразования в MVDR задается формулой:

$$\min_W \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \text{ при условии, если } \mathbf{w}^H \mathbf{d} = 1, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R}_{xx}$  – корреляционная матрица принимаемого сигнала  $\mathbf{x}_k$   $M \times M$ ;  $\mathbf{d}$  – предполагаемый вектор прихода полезного сигнала.

Решение задачи диаграммообразования MVDR (1) приводится в [4]:

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{d}}. \quad (2)$$

Отклонение предполагаемого вектора направления прихода полезного сигнала  $\mathbf{d}$  от реального  $\mathbf{l}$  может привести к подавлению полезного сигнала вместо помех. В ряде случаев данное отклонение можно ограничить какой-либо известной константой  $\varepsilon > 1$ .

Следовательно, для уменьшения чувствительности АФАР к углу прихода при использовании алгоритма MVDR необходимо реализовать минимизацию выходной мощности при сохранении приема сигнала со всех направлений диапазона  $[\mathbf{d} - \varepsilon : \mathbf{d} + \varepsilon]$ . Таким образом, ограничение (2) приобретает вид:

$$\min_W \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \text{ при условии, если } |\mathbf{w}^H \mathbf{c}| \geq 1 \quad (3)$$

для всех  $\mathbf{c} \in [\mathbf{d} - \varepsilon : \mathbf{d} + \varepsilon]$ .

Рассмотрим среднеквадратическое отклонение (СКО) между нулевым и выходным сигналом:

$$\text{СКО} = E[0 - (\mathbf{x}_k^H \mathbf{w}_k)^2] = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}.$$

В то же время ограничение  $|\mathbf{w}^H \mathbf{c}| \geq 1$  может быть выражено как:

$$J_2(\mathbf{w}_k) = 1,$$

где  $J_2(\mathbf{w}_k) = \varepsilon^2 \mathbf{w}_k^H \mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^H \mathbf{d} \mathbf{d}^H \mathbf{w}_k + \mathbf{w}_k^H \mathbf{d} + \mathbf{d}^H \mathbf{w}_k$ .

Следовательно, формула (3) примет вид:

$$\min_{\mathbf{w}} \text{СКО} \text{ при условии, если } J_2(\mathbf{w}_k) = 1.$$

Для решения данной задачи воспользуемся алгоритмом фильтрации Калмана. Неизвестная динамическая система может быть смоделирована как фильтр, вектор состояния которого подвергается марковскому процессу первого порядка, т. е.:

$$\mathbf{w}_{k+1} = \psi \mathbf{w}_k + \mathbf{n}_{pk},$$

где  $\psi$  – фиксированный параметр модели;  $\mathbf{n}_{pk}$  – шум процесса, который предполагается белым гауссовым с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей:

$$\mathbf{Q} = \delta_n^2 \mathbf{I},$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица  $M \times M$ ;  $\delta_n^2$  – дисперсия шума процесса.

Тогда уравнение измерения можно представить как:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^H \mathbf{w}_k \\ J_2(\mathbf{w}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{1k} \\ \mathbf{N}_{2k} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{N}_{1k}$  и  $\mathbf{N}_{2k}$  – остаточные и ограничительные ошибки, соответственно; они также предполагаются белыми гауссовыми с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \delta_1^2 & 0 \\ 0 & \delta_2^2 \end{bmatrix}.$$

Для получения рекуррентной формулы нахождения вектора  $\mathbf{w}_k$  используется расширенный фильтр Калмана второго порядка [5]. Вычислим Якобиан  $\mathbf{J}_w(k, \mathbf{w}_k)$  Гесса первой  $\mathbf{H}_1$  и второй  $\mathbf{H}_2$  размерностью  $M \times M$  строк уравнения (4):

$$\mathbf{J}_w(k, \mathbf{w}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^H \\ \varepsilon^2 \mathbf{w}_k^H - (\mathbf{d} \mathbf{d}^H \mathbf{w}_k)^H + \mathbf{d}^H \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_1 = 0, \mathbf{H}_2 = \varepsilon^2 \mathbf{I} - \mathbf{d} \mathbf{d}^H.$$

Обновление оценки вектора весовых коэффициентов происходит следующим образом:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{G}_k[\mathbf{z} - \mathbf{z}_0(k|k-1)],$$

где оценочное измерение  $\mathbf{z}_0(k|k-1)$  и коэффициент Калмана  $\mathbf{G}_k$   $M \times 1$  задаются как:

$$\mathbf{z}_0(k|k-1) = \begin{bmatrix} \Psi \mathbf{x}_k^H \mathbf{w}_{k-1} \\ J_2(\Psi \mathbf{w}_{k-1}) + \frac{1}{2} \text{tr}\{\mathbf{H}_2 \mathbf{P}(k|k-1)\} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{P}(k|k-1) \mathbf{J}_W(k, \Psi \mathbf{w}_{k-1}) \mathbf{S}_k^{-1},$$

где ковариационная матрица  $\mathbf{S}_k$   $2 \times 2$  и оценочная ковариационная матрица вектора весовых коэффициентов  $\mathbf{P}(k|k-1)$   $M \times M$  представляются как:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{J}_W(k, \Psi \mathbf{w}_{k-1}) \mathbf{P}(k|k-1) \mathbf{J}_W^H(k, \Psi \mathbf{w}_{k-1}) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \text{tr}\{\mathbf{H}_2 \mathbf{P}(k|k-1) \mathbf{H}_2\} + \mathbf{R},$$

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \Psi^2 \mathbf{P}(k-1|k-1) + \mathbf{Q}.$$

Ковариационная матрица вектора весовых коэффициентов обновляется следующим образом:

$$\mathbf{P}(k|k) = \{\mathbf{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{J}_W(k, \Psi \mathbf{w}_{k-1})\} \mathbf{P}(k|k-1) \times$$

$$\times \{\mathbf{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{J}_W(k, \Psi \mathbf{w}_{k-1})\}^H + \mathbf{G}_k \mathbf{R} \mathbf{G}_k^H.$$

### Результаты моделирования АФАР

В ходе исследований была смоделирована восьмиэлементная линейная АФАР, а также три варианта алгоритма работы: без алгоритма адаптации, на основе алгоритма MVDR с ограничением равенства и на основе алгоритма MVDR с использованием фильтра Калмана. Значение  $\psi$  было выбрано равным 1, что обеспечивает стабильность работы фильтра при условии, что помеховая обстановка стационарна.

Значения  $\delta_{\text{п}}$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  были выбраны равными  $10^{-2}$ , 1 и  $10^{-6}$ , соответственно. При всех измерениях реальный угол прихода сигнала был выбран равным  $10^\circ$  в азимутальной плоскости, уровень приходящего шума был выбран равным 10 дБ относительно полезного сигнала. На основании модели был проведен анализ уменьшения чувствительности алгоритма MVDR к отклонению угла прихода при использовании фильтра Калмана.

Как видно из рисунка 1, при появлении отклонения реального угла прихода сигнала от предполагаемого главный лепесток ДН АФАР, использующей Калмановский алгоритм, устремляется в промежуточное значение, не полагаясь полностью на предполагаемый угол. Это, в свою очередь, позволяет сохранить форму сигнала в отличие от алгоритма MVDR, основанного на ограничении равенства (рисунок 2), при относительном выигрыше ОСШ в сравнении с АФАР без пространственной фильтрации в 20 дБ (рисунок 3).

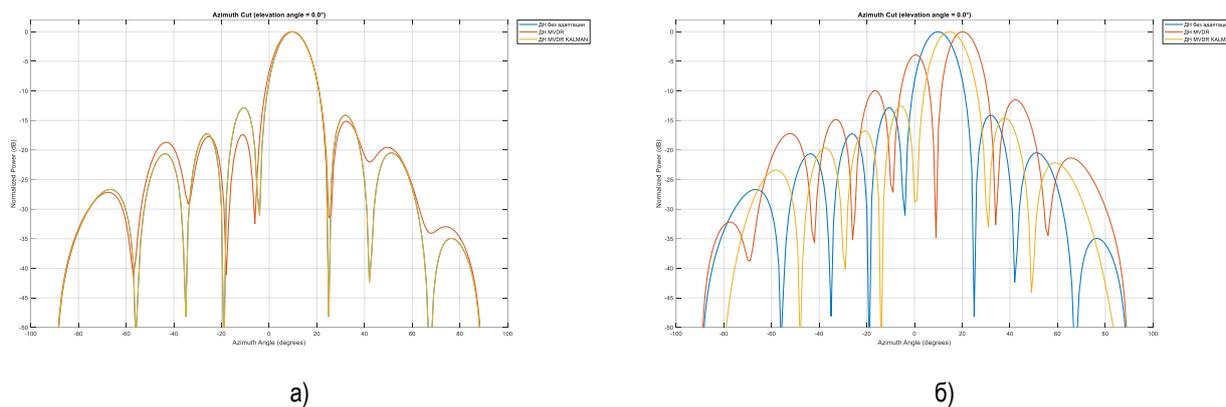


Рис. 1. ДН: а) при отсутствии отклонения; б) при наличии отклонения 10°

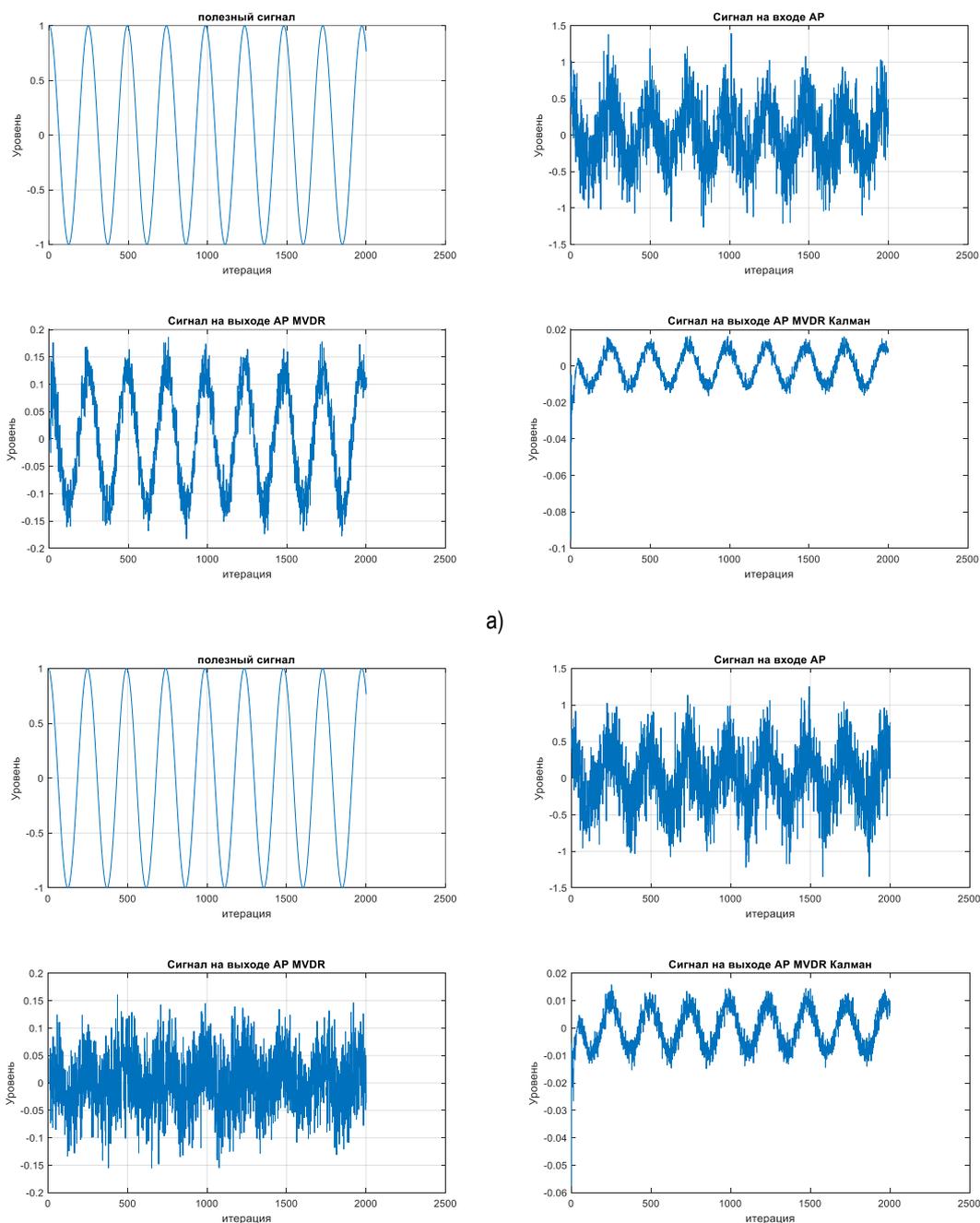


Рис. 2. Формы сигналов: а) при отсутствии отклонения; б) при наличии отклонения 10°

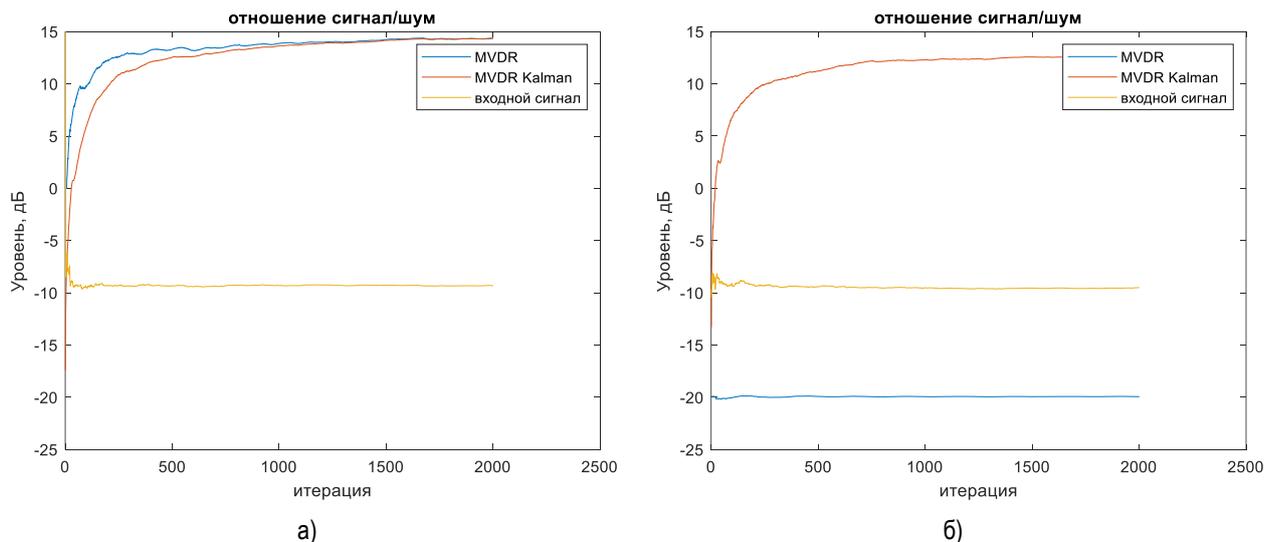


Рис. 3. ОСШ: а) при отсутствии отклонения; б) при наличии отклонения  $10^\circ$

Как показано на рисунке 4, для восьмиэлементной решетки допустимым можно считать угол отклонения вплоть до  $10^\circ$ . Далее значения ОСШ начинают стремительно снижаться.

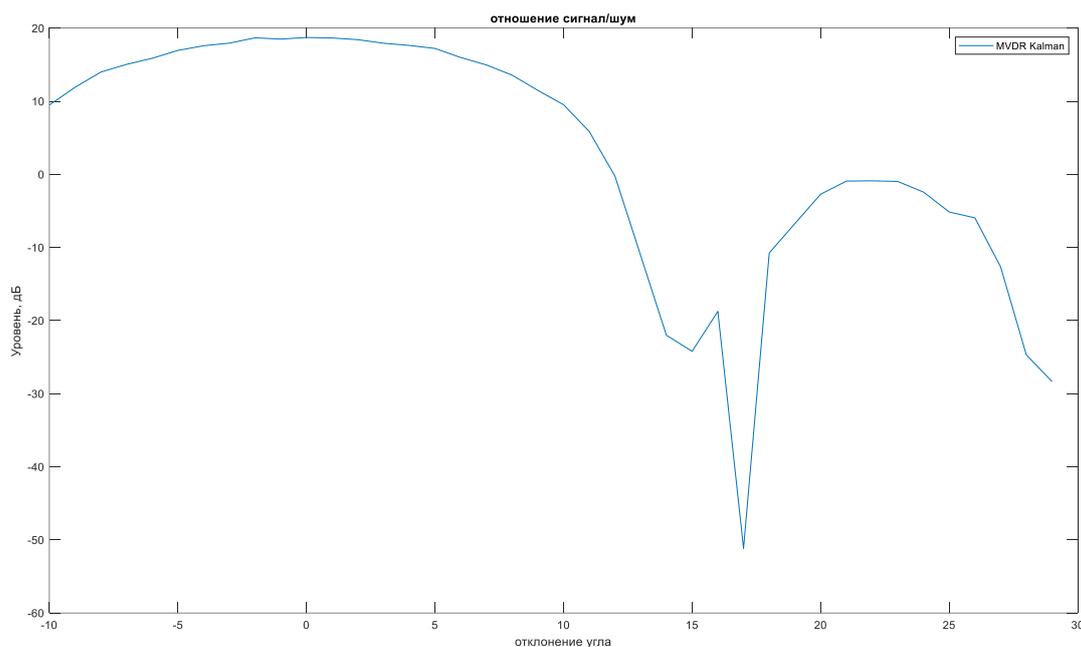


Рис. 4. ОСШ при различном значении отклонения

### Заключение

В данной работе рассмотрен метод уменьшения чувствительности АФАР к отклонению угла прихода с помощью расширенного фильтра Калмана. Выявлено, что алгоритм MVDR при введении ограничения неравенства на уровень выходного шума и решения задачи MVDR фильтром Калмана способен функционировать при существенном отклонении угла прихода сигнала, в то время как отклонения уже в  $1-2^\circ$  при введении ограничения равенства приводят к подавлению полезного сигнала. Было показано, что данный метод при условии понижения чувствительности к углу прихода способен давать выигрыш в ОСШ относительно АФАР без пространственной фильтрации в 20 дБ в диапазоне рассогласования углов вплоть до  $\pm 10^\circ$ .

Результаты исследований показывают эффективность использования принципов Калмановской фильтрации для уменьшения чувствительности приемной АФАР к отклонению предполагаемого угла прихода от реального, в связи с чем перспективным является модификация алгоритма MVDR с использованием менее требовательного к вычислительным мощностям и более устойчивого к нестационарным средам сигма-точечного фильтра Калмана.

### Литература

1. Kim J. W., Un C. K. An Adaptive Array Robust to Beam Pointing Error // IEEE Transactions on Signal Processing. 1992. Vol. 40. Iss. 6. PP. 1582–1584. DOI: 10.1109/78.139266
2. Vorobyov S. A., Gershman A. B., Luo Z. Q. Robust Adaptive Beamforming Using Worst-Case Performance Optimization: A Solution to the Signal Mismatch Problem // IEEE Transactions on Signal Processing. 2003. Vol. 51. Iss. 2. PP. 313–324. DOI: 10.1109/TSP.2002.806865
3. Hua Y., Gershman A. B., Cheng Q. Robustness Issues in Adaptive Beamforming and High-Resolution Direction Finding // High-Resolution and Robust Signal Processing / Ed. by Yingbo Hua, Alex Gershman, Qi Cheng. New York: Marcel Dekker, 2003. PP. 63–110. DOI: 10.1201/9781315214689
4. Monzingo R. A., Miller T. W. Introduction to Adaptive Arrays. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1980. 543 p.
5. Bar-Shalom Y., Li X. R., Kirubarajan T. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001. 545 p.

Статья поступила 11 ноября 2024 г.  
Одобрена после рецензирования 21 декабря 2024 г.  
Принята к публикации 27 декабря 2024 г.

*Материалы статьи были представлены на V Всероссийской научно-технической и научно-методической конференции магистрантов и их руководителей «Подготовка профессиональных кадров в магистратуре в эпоху цифровой трансформации» (ПКМ-2024).*

### Информация об авторах

*Щедрин Александр Алексеевич* – студент 2-го курса магистратуры (группа РТ-31м) Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича.  
E-mail: shedrin.aa@sut.ru

*Бойко Игорь Андреевич* – ассистент кафедры радиотехники Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича. E-mail: boiko.ia@sut.ru

## Using a Kalman Filter with Constraints to Reduce the Sensitivity of the Receiving Active Phased Array Antenna to the Angle

A. Schedrin✉, I. Boyko

The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications,  
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

**Problem Statement:** In the development of adaptive phased array antennas, the use of spatial selectivity, i. e., a priori data on the spatial coordinates of the signal source in the adaptation algorithm, proves to be more advantageous compared to utilizing information about the shape of the signal in non-static communication channels. One of the main problems affecting reliable signal reception is the mismatch between the expected angle of arrival of the signal and the actual angle. This issue becomes even more critical in conditions where the direction of the incoming useful signal changes over time. This article discusses a method to reduce the sensitivity of the adaptive phased array antenna to the mismatch between the expected and actual direction of the signal source. **Results:** A modification of the spatially selective MVDR (Minimum Variance Distortionless Response) algorithm is considered, which ensures the adaptation of the antenna pattern of the adaptive phased array to enhance the signal-to-noise ratio. The use of an extended Kalman filter for finding the optimal estimate of the weight vector, serving as a compromise between weight vectors forming the main lobe of the antenna pattern in both the expected and actual directions of the signal source, allowed for an improvement in the signal-to-noise ratio at the output of the small-element antenna array by at least 20 dB compared to the input signal, despite having an expected angle of arrival deviating from the real one within a range of  $\pm 10^\circ$  in the azimuth plane, and at a noise level of 10 dB compared to the signal. **Practical significance:** The use of this modification of the MVDR algorithm is justified in the development of spatially selective small-element receiving antenna arrays in cases of high inaccuracies in estimating the angle of arrival of the useful signal and the availability of substantial computational power in the adaptive device.

**Key words:** Kalman filter with constraints, adaptive antenna array, reduction of sensitivity to the angle of arrival, diagram formation to reduce interference, phased array with spatial selectivity

### Information about Authors

Schedrin Alexander — 2<sup>nd</sup> Year Master's Student (The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications). E-mail: shedrin.aa@sut.ru

Boyko Igor — Assistant of the Department of Radio Engineering (The Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications). E-mail: boiko.ia@sut.ru